Coordinación de relés de sobrecorriente usando programación lineal

Néstor Julián Estrada Cardona[*a], Oscar Gómez Carmona[a]

(a)Universidad Tecnológica de Pereira
Grupo de Investigación en Planeamiento de Sistemas Eléctricos
**nesju32@utp.edu.co*

(Recibido: Junio 30 de 2006 - Aceptado: Octubre 6 de 2006)

RESUMEN

En este documento se presenta una metodología matemática de optimización (puntos interiores) para solucionar el problema de coordinación de relés de sobrecorriente direccional de tiempo inverso (identificados como "67" según ANSI), en sistemas de potencia, cuando se usan como única protección y cuando hacen parte de un esquema de protección combinado con relés de distancia (identificados como "21" según ANSI).

PALABRAS CLAVE: Programación Lineal, Protección de Sistemas de Potencia, Método de Puntos Interiores, Relés de Distancia, Relés de Sobrecorriente, Sistemas Eléctricos.

Overcurrent relays coordination by using lineal programming

ABSTRACT

This document introduces an optimization (interior-point based) mathematical methodology to solve the problem of inverse time directional overcurrent relays (identified as "67" according to ANSI) coordination in power systems, when used as the only protection and when they are part of a protection scheme combined with distance relays (identified as "21" according to ANSI).

PALABRAS CLAVE: Lineal programming, Power systems protection, Interior-Point Method, Distance relays, Overcurrent relays, Electric systems.

1. INTRODUCCIÓN

La operación de los sistemas eléctricos de potencia debe tener como finalidad, la prestación de un servicio continuo, confiable y de buena calidad a todos los usuarios. Para lograr esto, se deben desarrollar metodologías computacionalmente eficientes que ayuden a garantizar el estado seguro de operación del sistema de potencia y a normalizarlo lo más rápido posible ante un estado de irregularidad. Uno de los aspectos más importantes en la operación de los sistemas eléctricos, es el control eficaz de una falla en el servicio, el cual se logra mediante sistemas de protección que retiren cualquier tipo de fallo lo mas rápido posible y sacando el menor número de elementos.

La corriente sufre un incremento en su valor cuando ocurre una falla, por tal razón, es la variable más utilizada en la detección de fallas de cortocircuito. Debido a esta característica, los relés de sobrecorriente son una alternativa técnica y económicamente viable para la protección de sistemas de subtransmisión, distribución o como una protección secundaria de los sistemas de transmisión.

Uno de los problemas asociados con esta clase de protección es la dificultad para realizar los cálculos de sus ajustes. Una gran cantidad de esfuerzos han sido dedicados a la automatización de la solución a este problema, mediante el desarrollo de procedimientos heurísticos que se ejecutan en forma manual o con software comercial, para optimizar la configuración de las protecciones sin que exista un planteamiento matemático riguroso.

En este artículo, se expone una metodología de optimización que básicamente plantea el proceso de coordinación de relés, como un problema de optimización matemática linealizado y resuelto con programación lineal mediante el método de puntos interiores.

2. PROTECCIÓN EN SISTEMAS DE POTENCIA

El diseño de un sistema de protecciones consiste en seleccionar los ajustes más convenientes de los dispositivos bajo los requerimientos básicos de sensibilidad, selectividad, confiabilidad, velocidad y economía. Estos requerimientos deben tener en cuenta las diferentes variaciones y configuraciones del sistema bajo las siguientes condiciones:

a. Diferentes tipos de fallo deben ser detectados por los relés apropiados.
b. Los relés localizados más cerca al fallo deben tener prioridad de operación.
c. Si un relé de protección primaria falla, uno de respaldo debe operar.
d. La operación del relé debe ser tan rápida como sea posible para prevenir daños en los equipos del sistema.

3. COORDINACIÓN DE RELÉS DE SOBRECORRIENTE DIRECCIONAL USANDO PROGRAMACIÓN LINEAL

La metodología consiste en encontrar los valores mínimos de DIAL para los relés de tiempo inverso, donde las corrientes de arranque y la relación de transformación son calculadas con anterioridad para encontrar las restricciones de coordinación [1, 2].

Para el caso mostrado en la figura 1, el problema se puede modelar matemáticamente así:

$$\begin{aligned} &\min \sum_{i=1}^{r} D_i \\ &S.A. \\ &t_j(F_1) - t_i(F_1) \geq CI \\ &t_j(F_2) - t_i(F_2) \geq CI \end{aligned} \qquad (1)$$

donde:

r: Número de relés.
D_i: Dial del relé *i*.
$t_j(F1)$: Tiempo de operación del relé j para un fallo en F1.
$t_i(F1)$: Tiempo de operación del relé i para un fallo en F1.
$t_j(F2)$: Tiempo de operación del relé j para un fallo en F2.
$t_i(F2)$: Tiempo de operación del relé i para un fallo en F2.
CI: Intervalo de coordinación.

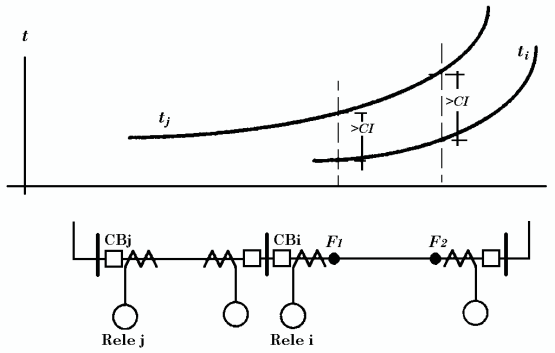

Figura 1. Coordinación de relés de sobrecorriente de tiempo inverso

F1 y F2 representan las condiciones de falla cercana y remota y se calculan considerando fallos trifásicos para los relés de fase y fallos monofásicos para los relés de tierra.

La función objetivo es la suma de los DIAL de todos los relés, minimizando los tiempos propios de los relés que es equivalente a minimizar los DIAL.

La relación de los tiempos de operación y el DIAL está dada por la siguiente ecuación:

$$t_{ijk} = \frac{a \times dial_i}{\left(M_{ijk}{}^{n} - 1\right)} \quad (2)$$

$$M_{ijk} = \frac{I_{fallaj}}{xIn_i} \quad (3)$$

Rescribiendo la ecuación (2) se obtienen ecuaciones lineales de igualdad para los tiempos de operación de cada relé en términos del DIAL:

$$t_{ijk} = K_{ijk} \times dial_i \quad (4)$$

$$K_{ijk} = \frac{a}{\left(M_{ijk}{}^{n} - 1\right)} \quad (5)$$

Otras restricciones como los valores permisibles máximos y mínimos para los DIAL pueden ser tratados de la misma manera, donde el límite inferior es la restricción dominante, por lo tanto se plantean *n* ecuaciones de desigualdad:

$$Dial_i \geq Dial_{\text{mini}mo} \quad (6)$$

Reescribiendo las ecuaciones (1), (4) y (6), se obtiene el modelo de programación lineal (7) para este problema:

$$\begin{aligned} & min \sum_{i=1}^{r} t_{ii} \\ & S.A. \\ & t_i\left(F_1\right) - t_j\left(F_1\right) \leq -CI \\ & t_i\left(F_2\right) - t_j\left(F_2\right) \leq -CI \\ & t_{ijk} - K_{ijk} \times dial_i = 0 \\ & -Dial_i \leq -Dial_{minimo} \end{aligned} \quad (7)$$

El problema es llevado a la forma canónica del modelo de programación lineal:

$$\begin{aligned} & Minimizar\left[f\right] * \left[x\right] \\ & S.A. \\ & \left[A\right]\left[x\right] \leq \left[b\right] \\ & \left[A_{eq}\right]\left[x\right] = \left[beq\right] \end{aligned} \quad (8)$$

donde:

X: es el vector columna con las incógnitas del problema.

$$x = \left[t_{propios}, t_{respaldo}, diales\right]^{t} \quad (9)$$

f: es el vector fila con los coeficientes de la función objetivo, en el cual las primeras *n* posiciones son unos y los restantes son ceros.

A: es la matriz de términos ubicados al lado izquierdo de las restricciones de desigualdad.

b: es el vector columna de términos ubicados al lado derecho de las restricciones de desigualdad.

Aeq: es la matriz de términos ubicados al lado izquierdo de las restricciones de igualdad.

beq: es el vector columna de términos ubicados al lado derecho de las restricciones de igualdad descritas, todos sus términos son cero.

4. COORDINACIÓN DE RELÉS DE SOBRECORRIENTE DIRECCIONAL EN UN ESQUEMA DE PROTECCIÓN COMBINADO CON RELÉS DE DISTANCIA USANDO PROGRAMACIÓN LINEAL

Los esquemas combinados de protección se utilizan en muchos sistemas de transmisión y subtransmisión donde los relés de distancia son usados como protección principal y los de sobrecorriente direccional como protección de respaldo [3]. Para este tipo de esquema se deben tener en cuenta dos clases de restricciones que son importantes. Una, es que el relé de sobrecorriente direccional de respaldo de un par de coordinación dado, debe ser más lento que la segunda zona del relé de distancia asociado al corta circuito principal, es decir:

$$t_b(F_3) - t_{Z2m} \geq CI' \quad (9)$$

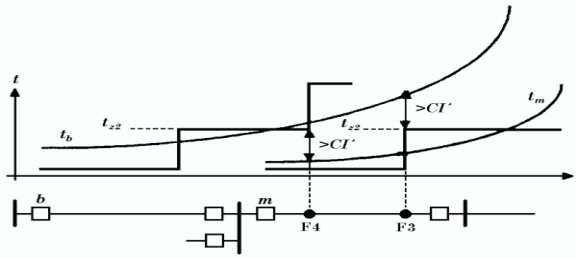

Figura 2. Coordinación entre relés de sobrecorriente direccional y de distancia

Donde CI´ es un intervalo de coordinación el cual no necesariamente debe ser igual al CI usado en las restricciones de selectividad entre los relés de sobrecorriente direccional. Se observa en la figura 2 que el tiempo de operación del relé de sobrecorriente tb es evaluado en el punto F3, donde la segunda zona del relé de distancia en *m* empieza.

La otra restricción es que la segunda zona del cortacircuito de respaldo *b* debe ser más lento que el relé de sobrecorriente direccional del cortacircuito principal *m*, es decir:

$$t_{Z2b} - t_m(F_4) \geq CI' \quad (10)$$

Para esta última restricción, el tiempo de operación del relé de sobrecorriente direccional principal es evaluado en el punto F4, el cual corresponde al alcance de la segunda zona del relé de distancia asociado con el cortacircuito de respaldo.

Si el ajuste de tiempo de la segunda zona *tz2* es un valor conocido, las restricciones (9) y (10) toman la forma:

$$-t_b(F_3) \leq -CI' - t_{Z2m} \quad (11)$$

$$t_m(F_4) \leq t_{Z2b} - CI' \quad (12)$$

En otras palabras, *tz2* contribuye a valores límites para restringir el DIAL, además las restricciones (11) y (12) podrían llevar a soluciones no factibles por lo que el valor de *tz2* debe ser cambiado dentro de sus valores permisibles hasta que el problema de optimización sea factible.

5. MÉTODO DE PUNTOS INTERIORES

Durante décadas el método simplex ha sido el método de solución a los problemas de programación lineal. Sin embargo, desde el punto de vista teórico, el tiempo de cálculo requerido por este método crece exponencialmente con el tamaño del problema.

Muchos investigadores han tratado de desarrollar algoritmos cuyos tiempos de cálculo tuviesen un crecimiento polinomial con el tamaño del problema. En 1984, Karmarkar propuso un algoritmo cuya complejidad computacional es polinomial y que resultó altamente competitivo frente al método simplex para resolver problemas de programación lineal de gran tamaño.

El algoritmo de Karmarkar originó multitud de trabajos alrededor de su idea, la cual ha sido mejorada en muchos aspectos. Una de las más fructíferas variantes es el algoritmo de barrera logarítmica Primal-Dual [4].

Método de Barrera Logarítmica Primal-Dual

Este método resuelve el problema de PL primal estándar:

$$\min c^T x$$
$$s.a$$
$$Axb =$$
$$x \geq 0$$

donde *x* es el vector de variables primales y su problema dual estándar en función del vector de variables duales *y*, incluyendo el vector de variables de holgura z, es:

$$\min b^T y$$
$$s.a$$
$$A^T y + z = c$$
$$z \geq 0$$

Se utiliza la función de barrera logarítmica para penalizar las restricciones de desigualdad $z \geq 0$.

$$\max\ b^T y + \mu^k \sum_{i=1}^{n} \ln z_i$$
$$s.a$$
$$A^T y + z = c$$

donde μ^k es el parámetro de barrera en la iteración *k* y debe ser disminuido a cero durante el proceso iterativo.

El algoritmo general de solución es el siguiente: [5]

1. Calcular un punto inicial.
Vector primal:

$$x^o = \eta \hat{x}$$

donde :

$$\eta = \frac{\|b\|_2 + 1}{\|A\hat{x}\|_2 + 1} \quad \text{y} \quad \hat{x}_j = \frac{1}{\|A_j\|_2 + 1}$$

Vector dual.

$$z^o = \begin{cases} si \quad c_j < 1, & z_j^o = 1 \\ caso\ contrario, & z_j^o = c_j \end{cases}$$

2. Calcular el parámetro de barrera y hacer k =0.

$$\mu^o = \frac{(x)^o{}^T z^o}{n}$$

3. Verificar convergencia.
Factibilidad primal:

$$\frac{\|Ax^k - b\|}{1 + \|x^k\|} \leq \varepsilon_f$$

Factibilidad dual:

$$\frac{\|A^T y^k + z^k - c\|}{1 + \|y^k\| + \|z^k\|} \leq \varepsilon_f$$

Condición de optimalidad:

$$\frac{\|c^T x^k - b^T y^k\|}{1 + \|b^T y^k\|} \leq \varepsilon_o$$

donde ε_f es el error de factibilidad y ε_o es el error óptimo. En caso de que los criterios de convergencia se cumplan, se debe parar.

4. Calcular los errores para el punto actual.

$$r_p^k = c - A^T y^k - z^k$$
$$r_d^k = b - Ax^k$$
$$r_c^k = \mu^k e - X^T Z^k e$$
$$donde:$$
$$X = diag[x_{12}x \quad ... x_n]$$
$$Z = diag[z_{12}z \quad ... z_n]$$
$$e = [11...1]^T$$

5. Obtener las direcciones de búsqueda.

$$\Delta x^k = \Delta x_{ctr}^k + \Delta x_{obj}^k + \Delta x_{fac}^k$$

Dirección central $\Delta x_{ctr}^k = \mu^k D_k^{-1} P^k D_k^{-1} (X^k) e$

Dirección objetivo $\Delta x_{obj}^k = D_k^{-1} P^k D_k^{-1} c$

$$\textit{Dirección factible}\quad \Delta x_{fac}^{k} = D_k^{-2} A^T (AD_k^{-2} A^T)^{-1} r_p^k$$

$$\Delta y^k = (AD_k^{-2} A^T)^{-1} [AD_k^{-2} r_d^k - A(Z^k)^{-1} r_c^k + r_p^k]$$

$$\Delta z^k = r_d^k - A^T \Delta y^k$$

donde

$$P^k = I - D_k^{-1} A^T (AD_k^{-2} A^T)^{-1} AD_k^{-1}$$

$$D_k^{-2} = \left(z^k\right)^{-1} x^k$$

6. Calcular los tamaños de los pasos para las variables primal y dual.

$$\alpha_p^k = \min\left\{1, \min_{\Delta x_i^k < 0}\left\{\frac{-x_i^k}{\Delta x_i^k}:\ \ i = 1, ..., n\right\}\right\}$$

$$\alpha_d^k = \min\left\{1, \min_{\Delta z_i^k < 0}\left\{\frac{-z_i^k}{\Delta z_i^k}:\ \ i = 1, ..., n\right\}\right\}$$

7. Actualizar las variables Primal y Dual:

$$x^{k+1} = x^k + \gamma\alpha_p^k \Delta x^k$$

$$y^{k+1} = y^k + \gamma\alpha_d^k \Delta y^k$$

$$z^{k+1} = z^k + \gamma\alpha_d^k \Delta z^k$$

donde el factor de seguridad : $0.95 \le \gamma \le 0.99995$

8. Reducir el parámetro de barrera

$$\mu^{k+1} = \sigma^k \frac{(z^k)^T x^k}{n}$$

donde *n* es el número de variables primales.

9. Volver al paso 3.

6. SISTEMA DE PRUEBA Y RESULTADOS

Para probar la metodología desarrollada en este trabajo, se realizó la coordinación de los relés de fase del anillo de 33 kV del sistema de subtransmisión de la ciudad de Pereira-Risaralda, usando relés de sobrecorriente y un esquema combinado de protección con sobrecorriente-distancia. El sistema de Pereira cuenta con relés de sobrecorriente direccionales 7SJ5125 y relés de distancia 7SA5115 marca Siemens.

Los transformadores de corriente son de relación 600/5 y los transformadores de potencial son de relación 33000/115.

En la tabla 1 se muestran los valores de corrientes obtenidos después de hacer los estudios de cortocircuito y contingencias.

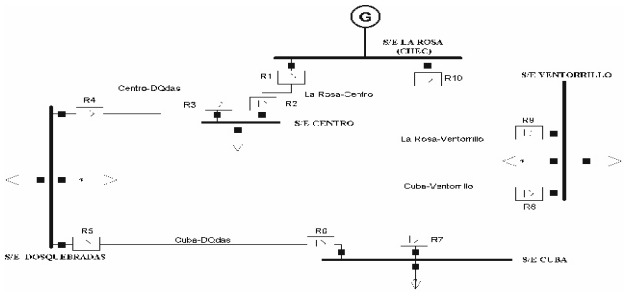

Figura 3. Diagrama unifilar anillo de 33 KV Pereira-Risaralda

Tabla 1. Corrientes de ajuste para los relés de sobrecorriente

Relé	$I_{cargamáxima}$	$I_{ccmáxima\ local}$	$I_{ccmáxima\ remota}$	$I_{ccmínima}$
R_1	419.01	15205.6	6254.1	1788.6
R_2	0	5477.8	2877.9	875
R_3	215.19	6254.1	3124.9	180.36
R_4	246.83	13036.4	5477.8	1952.4
R_5	391.7	11426.5	4350.7	1478.4
R_6	303.81	10111.3	4180.9	713
R_7	402.24	12387.2	3403.7	1103.9
R_8	195.89	6501.4	2226	406.8
R_9	0	3798.9	2177.5	318.2
R_{10}	573.14	15573	6109.1	2176.8

Para la coordinación, se utilizó un intervalo de coordinación entre relés de sobrecorriente (*CI*) y entre relés de sobrecorriente y distancia (*CI'*) de 0.2 s. El factor de sobrecarga se fijó en 1.5. La corriente de arranque de los relés de sobrecorriente debe ser calculada previamente, así como el alcance ohmnico de los relés de distancia.

Usando el método de puntos interiores (Método de Barrera Logarítmica Primal-Dual), con un error de factibilidad ε_f de $1x10^{-10}$, un error de óptimo de

ε_o de $1x10^{-10}$ y un factor de seguridad $^{Y}\ \gamma$ de 0.99995, se realizó la coordinación del sistema mostrado en la figura 3.

En la tabla 2 se muestran los resultados obtenidos al coordinar el sistema, considerando sólo relés de sobrecorriente direccionales, mientras en la tabla 3 se muestran los resultados para la coordinación de un esquema combinado con relés de distancia. Las iteraciones realizadas fueron 5 y 8, respectivamente. El dial fue considerado como una variable continua, por lo cual debe ser ajustado de acuerdo a los valores disponibles en los relés utilizados.

Los relés de distancia fueron ajustados para proteger dos zonas, la zona 1 se ajustó para el 80% de la línea protegida y con un tiempo de operación de 0.01s; la zonas 2 se ajustó al 100% de la línea protegida, más el 50% de la siguiente línea y con un tiempo de operación de 0.5s.

Tabla 2. Resultados para el caso de prueba

Relé	I de arranque		t de operación para fallo local		Dial
	XIn	[A] primarios	Propio	Respaldo	
R_1	1.05	630	0.4856	0.6796	0.2280
R_2	0.3	180	0.5229	0.6486	0.2641
R_3	0.54	324	0.4796	0.6308	0.2089
R_4	0.62	372	0.5419	0.7229	0.2854
R_5	0.98	588	0.4308	0.6449	0.1881
R_6	0.76	456	0.5258	0.7419	0.2401
R_7	1.01	606	0.4449	0.7881	0.1977
R_8	0.49	294	0.4694	0.7258	0.2142
R_9	0.11	66	0.5881	0.6856	0.3547
R_{10}	1.44	864	0.4486	0.6694	0.1908

Tabla 3. Tiempos de operación de los relés

Relé	I de arranque		t de operación para fallo local		Dial
	XIn	[A] primarios	Propio	Respaldo	
R_1	1.05	630	0.1621	0.4200	0.2778
R_2	0.3	180	0.1638	0.3217	0.3572
R_3	0.54	324	0.1431	0.3029	0.1940
R_4	0.62	372	0.1702	0.4221	0.4292
R_5	0.98	588	0.1029	0.2965	0.1406
R_6	0.76	456	0.1428	0.3702	0.2240
R_7	1.01	606	0.0965	0.4065	0.1390
R_8	0.49	294	0.1067	0.3428	0.1669
R_9	0.11	66	0.2048	0.3621	0.8580
R_{10}	1.44	864	0.1094	0.3067	0.1379

7. CONCLUSIONES

La presencia de restricciones de igualdad en el modelo matemático de coordinación de relés de sobrecorriente hace que se dificulte su solución, ya que éstas reducen en forma considerable la región de factibilidad.

Cuando se coordinan relés de sobrecorriente en esquema combinado con distancia, las restricciones impuestas por estos últimos contribuyen a valores límites para restringir el dial y éstas pueden llevar a soluciones no factibles.

El método de puntos interiores muestra ser una herramienta computacionalmente eficiente para la solución de problemas de optimización altamente complejos. Debido al crecimiento polinomial del tiempo de cálculo, este método es aplicable a problemas de gran tamaño.

Dada la característica del problema (gran cantidad de restricciones), el método de puntos interiores, se convierte en una técnica de solución más apropiada debido a que el proceso de búsqueda no requiere evaluar un número excesivo de puntos extremos.

8. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen la colaboración de todos los integrantes del Grupo de Investigación en Planeamiento de Sistemas Eléctricos de Potencia de la Universidad Tecnológica de Pereira.

9. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] L. G. Pérez y A. J. Urdaneta, *Optimal coordination of directional overcurrent relays considering definite time backup relaying,* en: IEEE Power Engineering Review, vol 14, No. 4, pp. 1276-1284, Julio de 1998.

[2] A. J. Urdaneta, L. G. Pérez and R. Nadira, o*ptimal coordination of directional overcurrent relays in interconnected Power Systems,* en: IEEE Transactions On Power Delivery, Vol 3, No. 3, pp. 903-909, Julio de 1988.

[3] A. J. Urdaneta, L. G. Pérez y H. Restrepo, *Optimal compution of distance relays second zone timing in a mixed protection scheme with directional overcurrent relays,* en: IEEE Transactions On Power Delivery, vol. 16, No. 3, pp. 385-388, Julio de 2001.

[4] E. Castillo, A. Conejo, P. Pedregal, R. García y N. Alguacil, *Formulación y resolución de modelos de programación matemática en ingeniería y ciencia,*febrero de 2002.

[5] M. Rider, *Método de puntos interiores para optimización en sistemas de potencia,* Universidad Tecnológica de Pereira, 2004.

[6] S. J. Wright, *Primal-Dual interior point methods,* SIAM, Philadelphia, PA, 1997.

[7] S. Mehrotra, *On the implementation of a primal-dual interior point method*, SIAM Journal on optimization, 1992.

[8] V. H. Quintana, G. L. Torres and P. Medina, *Interior point methods and their applications to power systems: A classification of publications and software codes*, IEEE Transactions Power Systems, vol. 15, No. 1, Febrero de 2000.